Моделирование колебаний балки под воздействием сейсмической нагрузки: сравнение классической и гистерезисной балок

Е. А. Карпов, email: believedream95@gmail.com
С. А. Зайцев, email: kondroshsergiano@gmail.com
О. А. Шеина, email: oksanaasheina@gmail.com

Воронежский государственный университет

Аннотация. *В настоящей работе приводятся результаты моделирования поведения балки, находящейся под внешним воздействием, формализуемым материнской вейвлет функцией из семейства вейвлетов Добеши. Производится сравнение классической балки и балки с гистерезисными свойствами. В качестве гистерезисного преобразователя используется модель Боук-Вена. Показано, что учет гистерезисных свойств напрямую влияет на характер колебаний: когда классическая балка демонстрирует периодические колебания, «гистерезисная» балка демонстрирует стабилизацию в положение равновесия. Полученный результат может быть интересен ученым и специалистам, имеющим дело с моделированием поведения несущих конструкций в экстренных ситуациях.*

Ключевые слова: *балка, гистерезис, модель Боук-Вена, сейсмическая нагрузка, нагрузка, моделирование, разностная схема.*

Введение

В настоящее время проектирование несущих конструкций является неотъемлемой частью строительного процесса [1]. Особенно ответственно относятся к выбору конструктивных составляющих зданий в городах и странах, находящихся в сейсмоопасных регионах. Одним из таких регионов является Япония, где, в виду особенностей местности, ученые были вынуждены использовать демпферы, основная задача которых – обеспечение избыточной устойчивости здания по отношению к сейсмическим возмущениям. Они обеспечивают «трансформирование» энергии сейсмических колебаний почвы в тепловую энергию посредством трения. Альтернативным вариантом обеспечения устойчивости зданий является использование более прочных материалов обеспечивающих меньшую амплитуду колебаний несущих конструкций. Известно, что одним из базовых элементов любой несущей конструкции является – балка (см. Рис. 1). Во время нагрузок, балка начинает изгибаться, и во внутренней структуре ее материала начинают возникать внутренние силы, стремящиеся вернуть балке исходную форму. В случае, если после снятия нагрузки балка принимает недеформированную форму, однако, отличную от исходной, то следует говорить об упруго-пластическом гистерезисе [2-6]. Поэтому, моделирование поведения балки под нагрузкой представляет практический интерес.

Ежегодно публикуется большое количество работ, посвященных исследованию характеристических особенностей балки под нагрузкой. Особое внимание уделяется численным методам решения уравнения колебаний балки. Один из таких методов основывается на дискретной дифференциальной геометрии [7]. Он предполагает разделение балки на конечное число дискретных узлов с последующим использованием степени свободы каждого. Получаемые уравнения движения интегрируются с использованием метода числовой интеграции Ньюмарка-бета, а именно неявной схемы Ньюмарка-бета второго порядка. В [7] демонстрируется эффективность численных методов применительно к модели балки, формализуемой посредством теории Тимошенко. Предложенный метод позволяет учитывать нелинейную деформацию, которую зачастую невозможно учесть в рамках аналитического подхода. Отметим, что предлагаемый метод является расширенной версией классического численного метода, функционирующего на основе разностных схем.

1. Уравнения колебаний балки

К настоящему времени известно большое количество типов балок. Классификация балок, обычно, производится по ряду критериев и каждый тип, как правило, применяется в конкретной задаче. Особый интерес представляет характер колебаний балки. Обычно, их описание сводится к двум схожим по своей идеологии подходам (см. Рис. 2). Первый из них предполагает перпендикулярность поперечного сечения нейтральной оси во время деформаций и именуется теорией Эйлера-Бернулли. Второй подход рассматривает прямую зависимость поперечного сечения от деформаций и именуется теорией Тимошенко, которая является обобщением теории Эйлера-Бернулли. Отметим, что, когда отношение длинны балки к ее толщине достаточно велико, оба подхода демонстрируют схожие результаты моделирования. Поэтому, в рамках настоящей работы, предположим, что это отношение велико и будем использовать теорию Эйлера-Бернули для описания колебаний балки (в представленном ниже уравнении используются нулевые граничные условия):

$$\begin{cases} u_{xxxx} = u_{tt} + g(x,t), x \in [0, L], t > 0, \\ u(x,0) = h_1(x), u_t(x,0) = h_2(x), \\ u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(L,t) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

где $u(x,t)$ – отклонение от положения равновесия, L – длина балки, $a = const$ – величина обратно пропорциональная площади поперечного сечения умноженной на плотность, $g(x,t)$ – нагрузка, обычно, формализуемая периодическим сигналом, $h_1(x), h_2(x) \in L_2$ есть произвольные функции

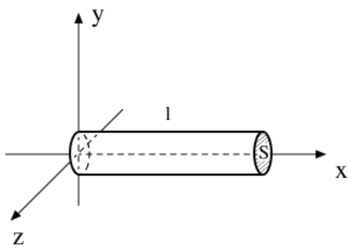


Рис. 1. Схематическое изображение балки в трехмерном пространстве со следующими характеристиками: длинна равна *l*, площадью поперечного сечения есть *S* и имеет форму круга.

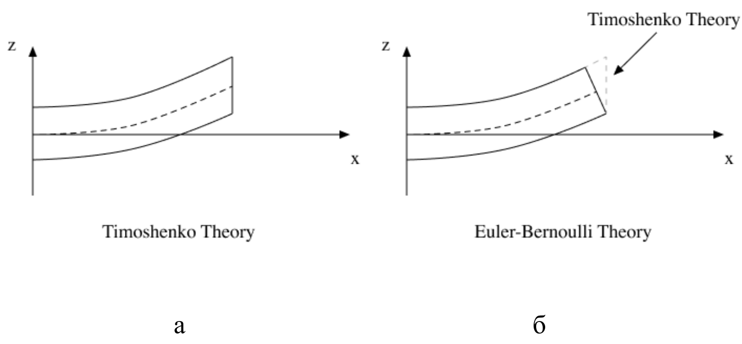


Рис. 2. Проекция балки на ось *Oxz* во время деформации: *а* – теория Тимошенко, *б* – теория Эйлера-Бернулли.

В настоящей работе рассматриваются нулевые начальные условия. Предположим, что после снятия нагрузки балка принимает недеформированную форму, однако, отличную от исходной. Очевидно, что такое свойство описывается упруго-пластическим гистерезисом. Учет этой особенности предполагает модификацию уравнения (1). А именно, пусть нормальное напряжение описывается следующим соотношением:

$$\sigma(t) = \Gamma \varepsilon(t) \tag{2}$$

тогда уравнение (1) с учетом соотношения (2) примет вид:

$$\begin{cases} \Gamma[u_{xx}]_{xx} = u_{tt} + g(x,t), x \in [0, L], t > 0, \\ u(x,0) = h_1(x), u_t(x,0) = h_2(x), \\ u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(L,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

где σ – нормальное напряжение, ε – относительное удлинение волокна материала, Г – гистерезисный преобразователь.

В настоящей работе гистерезисный преобразователь описывается, следуя феноменологическому подходу к описанию гистерезиса. Этот подход позволяет моделировать разные по форме петли гистерезиса, не обращая внимания на внутреннюю структуру моделируемой системы или процесса. Одна из самых известных моделей в рамках этого подхода является модель Боука-Вена, которая и используется в настоящей работе. Эта модель впервые была предложена Р. Боуком [8-9] и окончательно обобщена У. К. Веном [10]. Популярность этой модели обусловлена ее структурными особенностями, а именно тем, что это модель четырех-параметрическая и позволяет моделировать разнообразные по форме петли гистерезиса.

2. Метод численного решения уравнения колебаний

Моделировать поведение балки возможно двумя методами: аналитическим и численным. Очевидно, что получение аналитического решения для балки с гистерезисными свойствами трудоемко. Поэтому моделирование будет производится с использованием численных методов, а именно явной разностной схемой. Вводя равномерную сетку и полагая шаг по времени много больше шага по пространственной координате ($h_t >> h_x$) для сходимости решения, получим разностную схему для классической балки:

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} - h_t a^2 \frac{6u_i^j - 4u_{i-1}^j - 4u_{i+1}^j + u_{i+2}^j + u_{i-2}^j}{h_x^4} + h_t g(ih_x, jh_t) \tag{4}$$

и для балки с гистерезисными свойствами:

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} - h_t a^2 (\Gamma[\tilde{u}]_i^{j-1} - 2\Gamma[\tilde{u}]_i^j + \Gamma[\tilde{u}]_i^{j+1}) + h_t g(ih_x, jh_t) \tag{5}$$

где

$$\tilde{u} = u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j-1} \tag{6}$$

3. Результаты

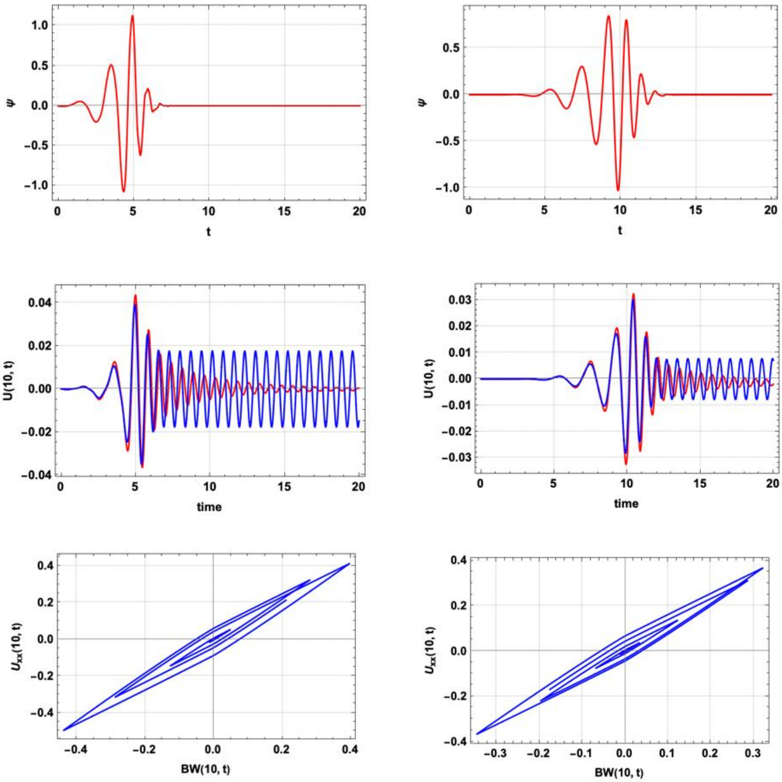
В настоящем разделе приводятся результаты моделирования колебаний классической и «гистерезисной» балок, находящихся под внешним воздействием. В качестве функции внешнего воздействия будем использовать «материнскую» вейвлет функцию:

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{7}$$

где a и b – являются параметрами растяжения и сдвига функции вейвлета, соответственно. Под вейвлет функциями, в рамках настоящей работы, понимаются хорошо известное семейство вейвлетов Добеши. Как можно видеть на Рис. 3, учет гистерезисных свойств кардинально влияет на характер колебаний балки. Результаты демонстрируют, что классическая балка после 6 временных отчетов модельного времени демонстрирует колебательный режим с постоянной амплитудой и частотой, в то время как «гистерезисная» балка со временем стабилизируется и со временем достигает положения равновесия. Такая особенность связана с тем, что «гистерезис» способствует диссипации энергии колебаний, получаемых извне в иную ее форму.

Заключение

В настоящей работе продемонстрированы результаты моделирования колебаний балки, находящейся под внешним воздействием, формализуемым материнской вейвлет функцией из семейства вейвлетов Добеши. Произведено сравнение характера колебаний классической и «гистерезисной» балки. В качестве гистерезисного преобразователя выступает модель Боук-Вена. Показано, что поведение балки с учетом гистерезисных свойств демонстрирует отличные результаты от поведения классической балки.



а б

Рис. 3. Верхний ряд – график материнской вейвлет функции от времени: *а* – вейвлет Добеши 6 порядка с параметрами $a = 1, b = 4$, *б* – вейвлет Добеши 10 порядка с параметрами $a = 1, b = 9$. На графиках в среднем ряду изображено отклонение дискретной точки балки с координатами 0.1 от положения равновесия в зависимости от времени (синяя кривая соответствует решению уравнения (4), а красная – уравнению (5)). Нижний ряд – параметрическая зависимость второй производной от выхода гистерезисного преобразователя. Параметры Боук-Вен модели: $\gamma = 0.5, \beta = 0.2, n = 0.2, A = 1.0$

Параметры балки: $L = 1, T = 20, a^2 = 0.5, h_x = 0.05, h_t = 0.00125$.

А именно, в случае с классической балкой у колебаний устанавливается периодический режим с постоянной амплитудой и частотой, тогда как «гистерезисная» балка стабилизируется в положение равновесия. Полученный результат может быть интересен ученым и специалистам, имеющим дело с моделированием поведения несущих конструкций в экстренных ситуациях.

Благодарность

Настоящая работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-08-00158-а.

Список литературы

1. Технология строительного производства. / Бозылев В. В. // УО "Полоцкий государственный университет" [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/8550
2. Медведский А.Л., Мелешенко П.А., Нестеров В.А., Решетова О.О., Семенов М.Е., Соловьев А.М. Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления / А.Л. Медведский, П.А. Мелешенко, В.А. Нестеров, О.О. Решетова, М.Е. Семенов, А.М. Соловьев // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления – 2020. – № 4. – С. 58-82.
3. Semenov M.E., Reshetova O.O., Solovyov A.M., Tolkachev A.V., Meleshenko P.A. Oscillations under hysteretic conditions: from simple oscillator to discrete Sine-Gordon model / M.E. Semenov, O.O. Reshetova, A.M. Solovyov, A.V. Tolkachev, P.A. Meleshenko // Springer Proceedings in Physics. 4th. Сер. Topics in Nonlinear Mechanics and Physics - Selected Papers from CSNDD 2018 – 2019. – p. 229-253.
4. Борзунов С.В., Семенов М.Е., Сельвесюк Н.И., Мелешенко П.А. Гистерезисные преобразователи со случайными параметрами / С.В. Борзунов, М.Е. Семенов, Н.И. Сельвесюк, П.А. Мелешенко // Математическое моделирование – 2019. – Т. 31. – № 7. – С. 109-126.
5. Семёнов М.Е., Матвеев М.Г., Мелешенко П.А., Соловьев А.М. Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского / М.Е. Семёнов, М.Г. Матвеев, П.А. Мелешенко, А.М. Соловьев // Мехатроника, автоматизация, управление – 2019. – Т. 20. № 2 – С. 106-113.
6. Semenov M.E., Solovev A.M., Popov M.A., Meleshenko P.A. Coupled inverted pendulums: stabilization problem / M.E. Semenov, A.M. Solovev, M.A. Popov, P.A. Meleshenko // Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv). 2018. – Т. 88 – № 4 – p. 517-524
7. Xuanhe L., Weicheng H., Khalid M. J. A discrete differential geometry-based approach to numerical simulation of Timoshenko beam / L.

Xuanhe, H. Weicheng, M. J. Khalid // Extreme Mechanics Letters – 2020 – v.35 – article 100622.

8. Bouc R. Forced vibration of mechanical systems with hysteresis / R. Bouc // Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation. – Prague, Czechoslovakia, 1967 – p. 315.

9. Bouc R. Modèle mathématique d'hystérésis: application aux systèmes à un degré de liberté / R. Bouc // Acustica (in French) 1971. – v. 24 – p. 16–25.

10. Wen Y. K. Method for random vibration of hysteretic systems / Y. K. Wen // Journal of Engineering Mechanics. American Society of Civil Engineers. – 1976 – v. 102 (2) – p. 249–263.